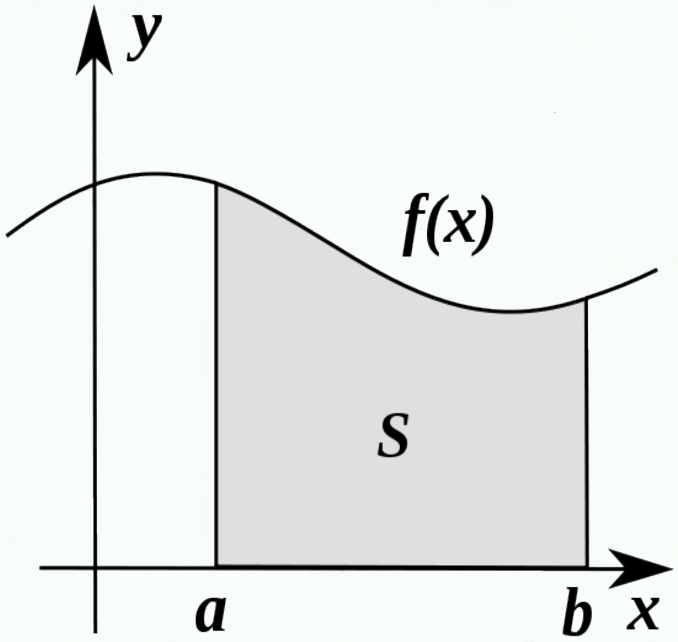


ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

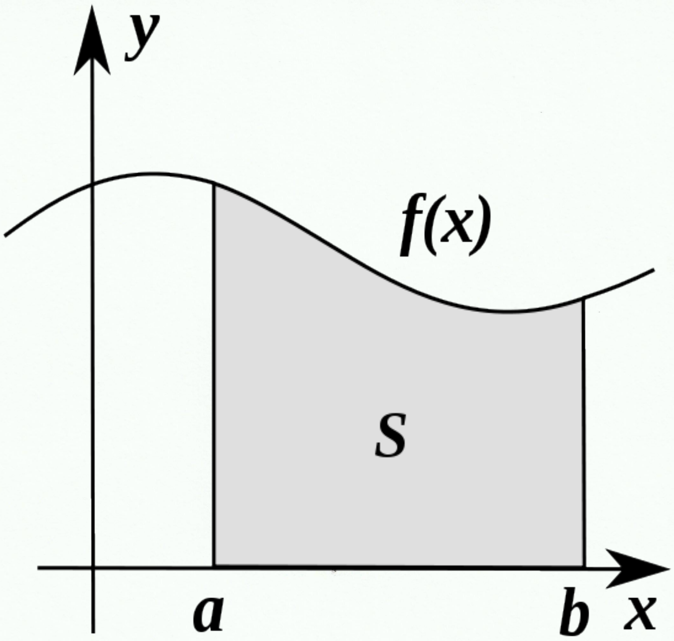
ΤΕΥΧΟΣ Α΄

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Πληροφορικής

ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Uni Student



ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΤΕΥΧΟΣ Α΄

Οι σημειώσεις αυτές περιέχουν θεωρία και λυμένες ασκήσεις από τις παραδόσεις του μαθήματος ''ΑΝΑΛΥΣΗ Ι''

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Uni Student

Α ΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Οποιαδήποτε απεικόνιση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}^*$

Συμβολίζεται : a_n νιοστός όρος

(a_n) η ακολουθία

Ειδικές ακολουθίες

(1) σταθερή

(2) αριθμητική πρόοδος : $a_{n+1} - a_n = \omega \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$a_n = a_1 + (n-1)\omega$

(3) γεωμετρική πρόοδος : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$

Βασικές κατηγορίες ακολουθιών

1) Αύξουσα : $a_n \leq a_{n+1}. \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ Όσο μεγαλώνει η τιμή που η μεγαλώνει και η τιμή της ακολουθίας.

2) Γνήσια αύξουσα : $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

3) Φθίνουσα : $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

4) Γνήσια φθίνουσα: $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

(1), (2), (3), (4) : Μονότονες

5) Άνω φραγμένη: $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$

6) Κάτω φραγμένη: $\exists m \in \mathbb{R} : a_n \geq m \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$

7) Φραγμένη $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq a_n \leq M , \forall n \in \mathbb{N}^*$

8) Απολύτως φραγμένη: $\exists \phi > 0 : |a_n| \leq \phi$

{ Ένας αριθμός ονομάζεται <u>άνω φράγμα</u> όταν είναι μεγαλύτερος απ' όλα τα στοιχεία του συνόλου }

SKAG

⇒ Άσκηση: Να δειχθεί ότι (a_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν (a_n) απολύτως φραγμένη.

ΥΠΟΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ & & b_1 & & b_2 & b_3 & & & b_4 & & b_5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ & \gamma_1 & \gamma_2 & & & & \gamma_3 & & \gamma_4 & & & \gamma_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ & \delta_1 & & \delta_2 & & \delta_3 & & \delta_4 & & \delta_5 & & \delta_6 \end{array}$$

⟶ όλες οι επιλογές με αύξοντα τρόπο

Ειδικά: $\boxed{\delta_n = a_{2n}}$

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Έστω μια ακολουθία (a_n) και μια γνησίως αύξουσα (k_n) στο $\mathbb{N}^*$
Ορίζουμε μια καινούρια ακολουθία (b_n) από τον τύπο:
$b_n = a_{k_n}$
Αυτή η ακολουθία είναι μια υποακολουθία της (a_n)
Η (b_n) μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνθεση της (a_n) και (k_n) δηλαδή:

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "b_n"'] & k_n \arrow[r, "a"] & a_{k_n} \end{tikzcd}$$

Άσκηση: Να αποδειχθούν οι ιδιότητες

Ορισμένες υποδείξεις

2) Αν $a_n \to a$ εφαρμόζοντας για $\epsilon = 1$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*$:

$$|a_n - a| < 1 \quad \forall\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < 1 + |a| \quad , \forall\ n \geq n_0$$

Ορίζουμε:

$$\phi = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots |a_{n_0-1}|, 1+|a|\}$$

Τότε $|a_n| \leq \phi \quad , \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

7 iii) Για καθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$|a_n\beta_n - a\beta| = |(a_n\beta_n - a_n\beta) + (a_n\beta - a\beta)| \leq |a_n||\beta_n - \beta| + |\beta||a_n - a|$$
$$\leq \phi|\beta_n - \beta| + |\beta||a_n - a| = x_n$$

Προφανώς $x_n \to 0$ οποτε $|a_n\beta_n - a\beta| \to 0$

7iv) Αρκεί να δειχθεί ότι:

$$\begin{matrix} \beta_n \to \beta \\ \beta \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} \to \frac{1}{\beta}$$

Αρχικά, με τη βοήθεια του ορισμού της συγκλίσεως δείχνουμε ότι:
$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*$ με $\frac{|\beta|}{2} \leq |\beta_n| \quad \forall\ n \geq n_0$

Κατόπιν αυτού είναι

$$\left|\frac{1}{\beta_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\beta_n - \beta|}{|\beta_n \cdot \beta|} \leq \frac{2}{|\beta|^2}|\beta_n - \beta| \quad \forall\ n \geq n_0$$

Πρόταση: Αν μια ακολουθία διαμερίζεται σε 2 υποακολουθίες που έχουν κοινό όριο, τότε κ αυτή θα συγκλίνει στο ίδιο όριο

Απόδειξη σελ 55

⟹Άσκηση
Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 2$, $a_1 = 2$

α) Να δειχθούν οι σχέσεις:

$a_{2n-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} + \frac{4}{3}$

$a_{2n} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + \frac{4}{3}$

β) Να βρεθεί το όριο της a_n

Υπόδειξη (i) επαγωγικά

(ii) Χρησιμοποίησε την προηγούμενη πρόταση και $a^n \to 0$ όταν $|a|<1$

Γενίκευση: άσκηση 2 λυμένη

Γεωμετρική ερμηνεία της συγκλίσεως

$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 2$, $a_1 = 2$

(γενικά $a_{n+1} = f(a_n)$)

⇒<u>Άσκηση</u>: Αν $a_n = 3n^2-2n+5$, να βρεθούν οι υπακολουθίες: (a_{2n-1}), (a_{n^3}) και (a_{3n+2})

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad \dots \quad a$

Όσο μεγαλώνει το n, η διαφορά $a-a_n$ γίνεται <u>οσοδήποτε</u> μικρή

$a \quad \dots \quad a_{10} \quad a_9 \quad a_8 \quad a_7 \quad a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1$

Όσο μεγαλώνει το n, η διαφορά a_n-a γίνεται <u>οσοδήποτε</u> μικρή

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7 \quad a_9 \quad a \quad a_{10} \quad a_8 \quad a_6 \quad a_4$

Όσο μεγαλώνει το n, η διαφορά $|a_n-a|$ γίνεται <u>οσοδήποτε</u> μικρή. Δηλαδή για δοσμένο $\varepsilon>0$ το $|a_n-a|<\varepsilon$ για αρκετά μεγάλο n

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΑΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ.

(a_n) συγκλίνει στο $a \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \underbrace{n_0=n_0(\varepsilon)}_{\text{n}_0 \text{ εξαρτάται από το } \varepsilon} \in \mathbb{N}^*$

$: n \geq n_0 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$

συμβολισμός : $a_n \to a$

Το a ονομάζεται όριο της (a_n) και σημειώνεται με

$\boxed{a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

⇒ <u>Άσκηση</u>: Το όριο μιας ακολουθίας εφ' όσον υπάρχει, είναι μοναδικό. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ εις άτοπον απαγωγή)

Οι ακολουθίες που έχουν όριο ονομάζονται <u>συγκλίνουσες</u>.

<u>Μηδενικές</u> ονομάζονται οι ακολουθίες που συγκλίνουν στο (0) δηλαδή $a_n \to 0$

Παράδειγμα : $\frac{1}{n} \to 0$ (κάτω φράγμα το 0)

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

1) Κάθε υποακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο $a_n \to a, \Rightarrow a_{k_n} \to a$

2) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη $a_n \to a \Rightarrow a_n$ φραγμένη

3) $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$

4) $a_n \to a \Rightarrow \lambda a_n \to \lambda a$

5) $\left. \begin{array}{l} a_n \to a \;,\; b_n \to b \\ \text{και } a_n \le b_n \;,\; \forall\, n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \Rightarrow a \le b$

$\forall\, n > \varepsilon$
κάποιου σταθερού αριθμού

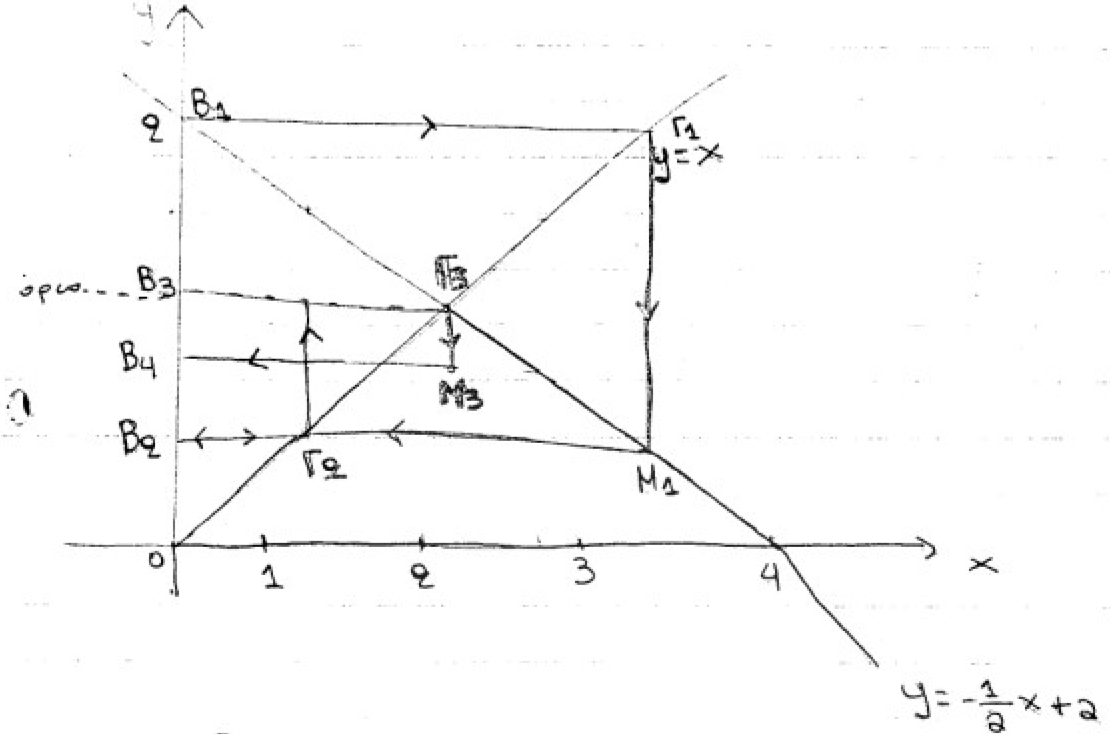
6) $\left. \begin{array}{l} \gamma_n \le a_n \le b_n \;,\; \forall\, n \in \mathbb{N}^* \\ \text{και } \gamma_n \to a \;,\; b_n \to a \end{array} \right\} a_n \to a$

7) $\left. \begin{array}{l} a_n \to a \\ b_n \to b \end{array} \right\} \Rightarrow$
i) $a_n + b_n \to a + b$
ii) $a_n - b_n \to a - b$
iii) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
iv) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u>: 1) η (5) ισχύει ακόμα και αν δοθεί ότι ισχύει για όλα τα n.
2) αν $a_n < b_n$ δε συνεπάγεται ότι $a < b$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ.

Θεωρούμε την ευθεία $y=x$ και την καμπύλη $y=f(x)$ (εδώ $y=-\frac{1}{2}x+2$)



$$\underset{(0,2)}{B_i} \rightarrow \Gamma_i \rightarrow M_i$$
$$\downarrow$$
$$B_{i+2}$$

⟹ Διάβασμα σελίδες 24, 25 παραδείγματα

ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΕΩΣ

Το $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται <u>σημείο συσσώρευσης</u> (σ.σ) της ακολουθίας (a_n) όταν: $\forall\, \varepsilon>0$ η σχέση: $|a_n - a|<\varepsilon$ ισχύει για άπειρους το πλήθος όρους της ακολουθίας (a_n) ή ισοδύναμα

$$\boxed{\forall\, \varepsilon>0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ \exists\, m \in \mathbb{N}^* : m \geq n \text{ και } |a_m - a|<\varepsilon}$$

Παρατηρήσεις

1) Το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας είναι το μοναδικό σημείο συσσωρεύσεως

⇒ Άσκηση. Όπως η αποδ. μοναδικότητας του ορίου.

2) Μια ακολουθία μπορεί να έχει περισσότερα του ενός σ.σ

⇒ Άσκηση: η ακολουθία (a_n) με $a_n = (-1)^n$ έχει σ.σ τους αριθμούς 1 και −1

3) Υπάρχουν ακολουθίες που δεν έχουν σ.σ.

⇒ Άσκηση: Η (a_n) με $a_n = n^2$ δεν έχει σ.σ

Πρόταση

a σ.σ. της (a_n) $\Leftrightarrow$ $\exists$ υποακολουθία $a_{k_n} \to a$

→ Απόδειξη σελ. 61

Supremum - Infimum ακολουθίας

- Αν (a_n) άνω φραγμένη ακολουθία το supremum της (συμβολίζεται $\sup a_n$) είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της
- Αν (a_n) κάτω φραγμένη ακολουθία το infimum της (συμβολ. $\inf a_n$) είναι το μέγιστο κάτω φράγμα της

Πρόταση. Κάθε φραγμένη και μονότονη ακολουθία (a_n) είναι συγκλίνουσα.

> Αν (a_n) αύξουσα και άνω φραγμένη
τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$

> Αν (a_n) φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$: Έστω (a_n) αύξουσα και άνω φραγμένη με $s = \sup a_n$

Τότε για $\varepsilon > 0$ το $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα της (a_n)
οπότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ με $s - \varepsilon < a_{n_0}$

Οπότε για $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \geq n_0$ θα είναι: $|a_n - s| = s - a_n \leq s - a_{n_0} < \varepsilon$

και επομένως $a_n \to s$

$\boxed{\text{Ασκήσεις}}$

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και σύγκλιση οι ακολουθίες:

(1) $a_{n+1} = \dfrac{2}{5 - 3a_n}$, $a_1 = 0$

- Στο πρόχειρο ελέγχουμε ορισμένους όρους $a_1 = 0 < a_2 = \frac{2}{5} < a_3 = \frac{10}{23} \ldots$

(μάλλον αύξουσα)

- Στο πρόχειρο βρίσκουμε το όριο της (a_n)

Έστω $a_n \to x$ τότε $a_{n+1} \to x$ και παίρνοντας όριο στην δοσμένη αναδρομική σχέση και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του ορίου προκύπτει:

$$x = \frac{2}{5-3x} \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ή } x = 1$$

Στο καθαρό

(i) (a_n) άνω φραγμένη από το $\frac{2}{3}$ δηλαδή $a_n < \frac{2}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Επαγωγικά: για $n=1 \Rightarrow a_1 = 0 < \frac{2}{3}$

Υποθέτουμε ότι $a_k < \frac{2}{3}$ και θα δείξουμε ότι $a_{k+1} < \frac{2}{3}$

Πραγματικά, $a_{k+1} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{5-3a_k} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow a_k < \frac{2}{3}$

(ii) (a_n) γνησίως αύξουσα

Πραγματικά, $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{5-3a_n} - a_n = \frac{3a_n^2 - 5a_n + 2}{5-3a_n} > 0$

Οπότε από την πρόταση προκύπτει ότι (a_n) συγκλίνουσα.
Προκειμένου να βρεθεί το όριό της έχουμε:

Έστω $a_1 \to x$ . . .

ΑΣΚΗΣΗ

2) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ $\quad a_1 = 2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3, 4 λυμένες 11, 12 άλυτες

limes superior - limes inferior

Έστω μια φραγμένη ακολουθία (a_n). Ορίζουμε δύο ακολουθίες (β_n), (γ_n)

$$\boxed{\beta_n = \sup_{m \geq n} a_m} \quad \text{και} \quad \boxed{\gamma_n = \inf_{m \geq n} a_m}$$

Ισχύουν: $\gamma_n \leq a_n \leq \beta_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

(β_n) φθίνουσα και κάτω φραγμένη

(γ_n) αύξουσα και άνω φραγμένη

Άρα, οι ακολουθίες αυτές συγκλίνουν

Θέτουμε:

$$\boxed{\beta = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \inf \beta_n \quad , n \in \mathbb{N}^*}$$ ← Συμβολ. $\lim\sup a_n$

limes superior της (a_n)

$$\boxed{\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \sup \gamma_n \quad , n \in \mathbb{N}^*}$$ ← Συμβολ. $\lim\inf a_n$

limes inferior της (a_n)

$\inf a_m \leq a_n \leq \sup a_m$

$$\boxed{\lim\sup a_n = \inf \sup_{m \geq n} a_m \quad , n \in \mathbb{N}^*}$$

και

$$\boxed{\liminf a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m}$$

Ισχύει

$\liminf a_n \leq \limsup a_n$

ΠΡΟΤΑΣΗ : (απόδειξη σελ. 65) Super SOS

τα $\limsup a_n$, $\liminf a_n$ είναι σημεία συσσωρεύσεως της (a_n)

Επιπλέον, για κάθε άλλο σ.σ. a της a_n ισχύει:

$$\boxed{\liminf a_n \leq a \leq \limsup a_n}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ (Bolzano-Weirstrass)

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ένα τουλάχιστον σ.σ

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν (a_n) φραγμένη και $a\in\mathbb{R}$ τότε

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \limsup a_n = a = \liminf a_n}$$

Απόδειξη

" $\Longrightarrow$ " προφανές

" $\Longleftarrow$ " Οι ακολουθίες (β_n), (γ_n) ισοσυγκλίνουν στο a
και $\gamma_n \le a_n \le \beta_n$ οπότε $a_n \to a$

Να βρεθούν με τη βοήθεια του ορισμού τα $\limsup a_n$ και
$\liminf a_n$ όταν:

$$a_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{n}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

$$\beta_n = \sup_{m \ge n} a_m = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \sup\left\{1+\frac{1}{m} : \begin{matrix} m \text{ περιττός} \\ m \ge n \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 1+\frac{1}{n}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 1+\frac{1}{n+1}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Λύση

$\lim\sup = 1$

$\lim\inf = 0$

Άρα $\beta_n \to 1$ και $\limsup a_n = 1$.

$$\gamma_n = \inf_{m \ge n} a_m = \inf\left\{\frac{1}{m^2} : \begin{matrix} m \text{ άρτιος} \\ m \ge n \end{matrix}\right\} = 0$$

Άρα $\gamma_n \to 0$ και $\liminf a_m = 0$.

(!) Βασική άσκηση (λυμένη)

Αν η ακολουθία (a_n) διαμερίζεται σε 2 ακολουθίες (x_n), (ψ_n) με $x_n \to x$ και $\psi_n \to y$ τότε τα μοναδικά σημεία συσσωρεύσεως της (a_n) είναι τα x, y

→ Η άσκηση αυτή γενικεύεται για περισσότερες ακολουθίες

ΑΣΚΗΣΗ. Παράδειγμα: Να ευρεθούν τα σ.σ. της ακολουθίας (a_n) καθώς και τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ όταν:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{αν } n = 3p, \ p \in \mathbb{N}^* \\ \frac{n^2+5n+6}{2n^2+4n+8}, & \text{αν } n = 3p+1, \ p \in \mathbb{N} \\ \frac{3n^3+1}{4n^3+7}, & \text{αν } n = 3p+2, \ p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ασκήσεις : 22, 23, 24 λυμένες

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Η ακολουθία (a_n) ονομάζεται βασική όταν:

$\forall\ \varepsilon>0 : \exists n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* : \forall\ m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

Θεώρημα Cauchy

Μια ακολουθία συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν είναι βασική

Απόδειξη

Αν $a_n \to a$ τότε για $\varepsilon>0$ $\exists : n_0 = N_0(\varepsilon) : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Οπότε αν $m, n \geq n_0$ έχουμε:

$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Αντιστρόφως, αν η (a_n) είναι βασική θα δειχθεί αν είναι συγκλίνουσα

- Αρχικά, θα δειχθεί ότι η (a_n) είναι φραγμένη. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της βασικής ακολουθίας για $\varepsilon = 1$

$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall\ n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_{n_0}| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_m| < 1 + |a_{n_0}|\ \forall\ n \geq n_0$

- Αν εκλεγεί $\Phi = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots |a_{n-1}|, 1+|a_{n_0}|\}$

τότε προκύπτει $|a_n| \le \Phi$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

· Επειδή η (a_n) είναι φραγμένη θα έχει ένα σ.σ a, θα δειχθεί ότι $a_n \to a$

Πραγματικά έχουμε:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : m, n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}^* : m \ge n$ και $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \ge n_0$ τότε από το (2)
$\exists m \in \mathbb{N}^* : m \ge n$ και $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Εφαρμόζοντας το (1) για αυτά τα m, n προκύπτει $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

Άρα, $|a_n - a| \le |a_n - a_m| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

ΚΑΤ' ΕΚΔΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

- $a_n \to +\infty \overset{o\varphi}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* : n \ge n_0 \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon}$

$a_n \to -\infty \overset{o\varphi}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* : n \ge n_0 \Rightarrow a_n < -\frac{1}{\varepsilon}$

Ιδιότητες ανάλογες της συγκλίσεως (σελ 68, 69)

Πρόταση

i) Αν (a_n) αύξουσα και όχι άνω φραγμένη τότε $a_n \to +\infty$

ii) Αν (a_n) φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη τότε $a_n \to -\infty$

Αποδ. σαν άσκηση

Τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ μιας ακολουθίας (a_n) όχι κατ' ανάγκη φραγμένης ορίζονται όπως στις φραγμένες ακολουθίες μόνο που εδώ ανήκουν στο σύνολο $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Πρόταση

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim\inf a_n = +\infty$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\sup a_n = -\infty$

Απόδειξη σαν άσκηση

ΕΙΔΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1. $a_n = a^n$

α) Αν $|a|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Πράγματικά, για $a \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow \exists \ \theta > 0 : \frac{1}{|a|} = 1+\theta$$

Οπότε, $\frac{1}{|a_n|^n} = (1+\theta)^n \geq 1+n\theta > n\theta \Rightarrow$

$|a_n| = |a^n| < \frac{1}{n\theta} \Rightarrow a_n \to 0$

β) Αν $a=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$

γ) Αν $a>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$

Πραγματικά, $a>1 \Rightarrow \exists\ \theta>0 : a=1+\theta \Rightarrow$

$a^n=(1+\theta)^n \geq 1+n\theta > n\theta \Rightarrow a^n \to +\infty$

δ) Αν $a=-1$ η ακολουθία κυμαίνεται

ε) Αν $a<-1$ η ακολουθία δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ διότι η υπακολουθία των περιττών θα συγκλίνει στο $-\infty$ και των θετικών στο $+\infty$

2. $a_{n+1}=\beta a_n+\gamma$

α) Αν $\beta=1$, $\gamma\neq 0$ αριθμητική πρόοδος

Τότε, $a_n=a_1+(n-1)\gamma$ οπότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \gamma>0 \\ -\infty, & \text{αν } \gamma<0 \end{cases}$$

β) Αν $\beta\neq 1$, $\gamma=0$ γεωμετρική πρόοδος

Τότε: $a_n=a_1\cdot\beta^{n-1}$ οπότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a, & \text{αν } |\beta|<1 \\ +\infty, & \text{αν } \beta>1 \text{ είναι } a_1>0 \\ -\infty, & \text{αν } \beta>1 \text{ είναι } a_1<0 \end{cases}$$

γ) Αν $\beta=1$, $\gamma=0$ σταθερή

δ) Αν $\beta\neq1$, $\gamma\neq0$

Τότε, $a_2=\beta a_1+\gamma$

$a_3=\beta a_2+\gamma = \beta(\beta a_1+\gamma)+\gamma = \beta^2 a_1+\gamma(1+\beta)$

$a_4=\beta a_3+\gamma = \beta[\beta^2 a_1+\gamma(1+\beta)]+\gamma = \beta^3 a_1+\gamma(1+\beta+\beta^2)$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{a_n=\beta^{n-1}a_1+\gamma(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{n-2})}$$

Οπότε,

$$a_n=\beta^{n-1}a_1+\gamma\frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta}=\beta^{n-1}\left(a_1-\frac{\gamma}{1-\beta}\right)+\frac{\gamma}{1-\beta}$$

Άρα,

$$a_n=\beta^{n-1}\mu+\frac{\gamma}{1-\beta} \quad \text{όπου} \quad \mu=a_1\frac{\gamma}{1-\beta}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}\frac{\gamma}{1-\beta}, & \text{αν } |\beta|<1\\ +\infty, & \text{αν } \beta>1 \text{ και } \mu>0\\ -\infty, & \text{αν } \beta>1 \text{ και } \mu<0\end{cases}$$

3. Οι ακολουθίες:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\beta_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

αποδεικνύεται ότι είναι:

(i) γνησίως αύξουσες
(ii) φραγμένες $(2 \leq a_n < \beta_n < 3)$

Άρα, συγκλίνουσες

(iii) Συγκλίνουν στο ίδιο όριο

Το κοινό όριο των δύο αυτών ακολουθιών είναι ο γνωστός αριθμός του Euler $e = 2,718\dots$
που αποτελεί βάση των νεπεριων λογαρίθμων

Αποδεικνύεται ότι $e \notin \mathbb{Q}$

Έτσι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \to e$$

Ασκήσεις : 19, 26 λυμένες

Άσκηση : Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

(i) $x_n = \left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$

Εχουμε $x_n = \left[\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right]^{\frac{1}{5}} = a_{5n}^{\frac{1}{5}}$

όπου $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Επειδή, $a_n \to e \Rightarrow a_{5n} \to e \Rightarrow x_n = e^{1/5}$

Αναλογα, μπορει να αποδειχθει οτι:

$$\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n \to e^{1/k} \quad , \forall\ k \in \mathbb{N}^*$$

ii) $y_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

Εχουμε $y_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n+2} =$$

$$= a_{n+1} \cdot a_n \frac{n+1}{n+2} \to e^2$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ

1. Αν (a_n) είναι μια ακολουθία με $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ και

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda < 1$$

Τότε, $a_n \to 0$

Απόδειξη σαν άσκηση

Παράδειγμα: $a_n = \dfrac{(-1)^n (n+1)^2}{3^n}$

Έχουμε:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+2)^2}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n (n+1)^2}{3^n}}\right| = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

Άρα, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \dfrac{1}{3} < 1$

Οπότε, $a_n \to 0$

Ασκήσεις

Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές:

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{n!}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{n^n}$$

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n (n+1)!}{n^{2n}}$$

SKAG

Διάβασμα Ασκηση 18 λυμένη

2. Κριτήριο Stolz (όχι απόδειξη)

Εστω (a_n) τυχαία ακολουθία και (A_n) γνησίως αύξουσα, μη φραγμένη θετικών αριθμών.

Τότε, αν $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = d \in \bar{\mathbb{R}}$

τότε $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{A_n} = d$

ΔΙΑΒΑΣΜΑ : 28, 29, 30 Λυμένες ασκήσεις

→ Ασκηση: Να δειχθεί ότι:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^k+3^k+\dots+n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$

Θέτουμε, $a_n = 1+2^k+\dots+n^k$ και

$A_n = n^{k+1}$

Οπότε,

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \frac{1+2^k+\dots+n^k+(n+1)^k-(1+2^k+\dots+n^k)}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}} =$$

$$= \frac{(n+1)^k}{(n+1-n)\left[(n+1)^k+(n+1)^{k-1}n+\dots+(n+1)n^{k-1}+n^k\right)} =$$

Διαιρώ με $(n+1)^K$

$$= \frac{1}{1+\frac{n}{n+1}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\dots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{K-1}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^K}$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \frac{1}{K+1} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = \frac{1}{K+1}$$

3. (όχι απόδειξη)

Αν για μια ακολουθία (a_n) θετικών αριθμών υπάρχει το:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \quad \in \mathbb{R}$$

Τότε, υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^3+3n^2+2n+7} = 1$

Αν θέσω: $a_n = 4n^3+3n^2+2n+7$

τότε,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(n+1)^3+3(n+1)^2+2(n+1)+7}{4n^3+3n^2+2n+7}$$

οπότε $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 1$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$$

για κάθε ... πολυώνυμο $P(n)$ με $P(n)>0$

→ Άσκηση: 27 λυμένη

ΣΕΙΡΕΣ

ΠΩΣ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΟ $\mathbb{R}$;

ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΠΑΡΟΜΟΙΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ;

Παράδειγμα

Έστω $S = 1-2+4-8+16-32+\dots$

Τότε μπορεί να είναι:

α) $S = 1-2(1-2+4-8+\dots) = 1-2S \Rightarrow$

$3S = 1 \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{3}}$

β) $S = (1-2)+(4-8)+(16-32)+\dots =$
$= (-1)+(-4)+(-16)+\dots \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S = -\infty}$

γ) $S = 1 + (-2+4) + (-8+16) + \dots =$
$= 1 + 2 + 8 + \dots \Rightarrow \boxed{S = +\infty}$

Ορισμός

Δίνεται η ακολουθία (a_n) πώς θα ορισθεί το άπειρο άθροισμα;
δηλαδή η σειρά;

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Αρχικά, ορίζουμε μια καινούρια ακολουθία (σ_n) με

$\boxed{\sigma_n = \sum_{n=1}^{n} a_i}$ που ονομάζεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της (a_n)

1. Περίπτωση
$\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \in \mathbb{R}$

Τότε θα λέμε ότι η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

2. Περίπτωση
$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$ (ή $-\infty$)

a_n γενικός όρος της σειράς

Τότε, θα λέμε ότι η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει κατ' εκδοχή στο $+\infty$ (ή $-\infty$)

ή αλλιώς απειρίζεται θετικά (ή αρνητικά) και θα σημειώνεται με:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \quad (\text{ή } -\infty)$$

3. Περίπτωση
$\nexists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$ τότε η σειρά αποκλίνει

Παραδείγματα

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα το κλάσμα: $\frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Οπότε είναι:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Άρα $S_n \to 1$ οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{\Gamma}{(x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + \Gamma(x)(x-2)$$

Εφαρμόζοντας την σχέση για:

$$x=0 \Rightarrow 1 = A(0-2)(0+3) \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$x=2 \Rightarrow 1 = B\,2(2+3) \Rightarrow B = \frac{1}{10}$$

$$x=-3 \Rightarrow 1 = \Gamma(-3)(-3-2) \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{15}$$

Άρα $\dfrac{1}{x(x-1)(x+3)} = -\dfrac{1}{6x} + \dfrac{1}{10(x-2)} + \dfrac{1}{15(x+3)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

Οπότε $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3\cdot4\cdot5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$$

$\vdots$

$$\frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}.$$

Άρα: $\sigma_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} \to \frac{1}{4}$

Οπότε: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

3. Γεωμετρική σειρά ...

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \quad \text{ή} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{n}$$

όπου $|a|<1$

Ισχύει, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \frac{1}{1-a}$

διότι,

$$\sigma_n = 1+a+a^2+\dots+a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$$

Οπότε $\boxed{\sigma_n \to \frac{1}{1-a}}$

διότι $a^n \to 0$ καθώς $|a|<1$

4 Άσκηση 4 λυμένη

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\,a^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}} \quad , |a|<1$$

$$\sigma_n = 1+2a+3a^2+\dots+na^{n-1} \quad (1)$$

$$a\sigma_n = a+2a^2+\dots+(n-1)a^{n-1}+na^n \quad (2)$$

Αφαιρούμε τις (1) και (2) οπότε

$$(1-a)\sigma_n = 1+a+a^2+\dots+a^{n-1}-na^n =$$

$$= \frac{1-a^n}{1-a} - na^n$$

Οπότε,

$$\sigma_n = \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{[(1-a)n+1]a^n}{(1-a)^2}$$

Θέτουμε, $\boxed{\beta_n = [(1-a)n+1]a^n}$

και θα δειχθεί ότι $\beta_n \to 0$

Πραγματικά,

$$\left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right| = \left|\frac{[(1-a)(n+1)+1]\,a^{n+1}}{[(1-a)n+1]\,a^n}\right| =$$

$$= \frac{(1-a)(n+1)+1}{(1-a)n+1}\,|a|$$

Άρα $\left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right| \to |a| < 1$

Οπότε $\beta_n \to 0$ και $\sigma_n \to \frac{1}{(1-a)^2}$

→ Ασκήσεις 1, 2, 3, 5 λυμένες
1(β), 3(a) άλυτες

5 Εκθετική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \quad \left(\text{ή } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)$$

Αναλυτικά

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \dots$$

Επειδή, $\sigma_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \to e$

προκύπτει $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e}$

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άσκηση (4 λύση)

Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} = \underline{2e-1}$ $\quad 0! = 1$

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \right) =$

$= e - 1 - (e - 1 - 1) = 1.$

6. Αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{συγκλίνει αν } p>1 \\ \text{απειρίζεται θετικά αν } p\leq 1 \end{cases}$$

Παραδείγματα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} = +\infty.$$

Ιδιότητες σειρών

1. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \to 0$

Πραγματικά,

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$ τότε $S_n \to S$

οπότε $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$

Εφαρμογή: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ δεν συγκλίνει διότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παράδειγμα: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. ενώ $\frac{1}{n} \to 0$

2. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ <u>συγκλίνει</u> (σειρά συγκλίνει απολύτως)

τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ επίσης <u>συγκλίνει</u>.

Πραγματικά,

Αν $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ και $S_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

τότε επειδή η (S_n) συγκλίνει θα είναι <u>βασική</u> δηλαδή:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : m > n \geq n_0 \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon$

Τότε όμως για $m > n \geq n_0$ θα είναι:

$|\sigma_m - \sigma_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| = |S_m - S_n| < \varepsilon$

Άρα, (σ_n) βασική όπως και συγκλίνουσα.

Αντίστροφο, δεν ισχύει.

Παράδειγμα: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

Σειρές με μη αρνητικούς όρους

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όπου $a_n \geq 0$

Παράδειγμα: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. ενώ $\frac{1}{n} \to 0$

2. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει (σειρά συγκλίνει απολύτως)

τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ επίσης συγκλίνει.

Πραγματικά,

Αν $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ και $S_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

τότε επειδή η (S_n) συγκλίνει θα είναι βασική δηλαδή:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : m > n \geq n_0 \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon$

Τότε όμως για $m > n \geq n_0$ θα είναι:

$|\sigma_m - \sigma_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| = |S_m - S_n| < \varepsilon$

Άρα, (σ_n) βασική όπως και συγκλίνουσα.

Αντίστροφο, δεν ισχύει.

Παράδειγμα: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

Σειρές με μη αρνητικούς όρους

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου $a_n \geq 0$

Για $p>0$ η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ είναι φθίνουσα οπότε

εφαρμόζεται η πρόταση.

Έτσι, $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k$

και η σειρά αυτή είναι γεωμετρική οπότε συγκλίνει αν και μόνο αν $2^{1-p}<1 \Leftrightarrow p>1$

Άσκηση: 12 λυμένη

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ

Κριτήριο συγκρίσεως I

Για δυο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

με $\boxed{0 \le a_n \le b_n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, ισχύουν

i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

Απόδειξη σελ. 105

Παραδείγματα

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4n+11}{5n^4+6n^3+4n^2+1}$

SKAG

Αν $a_n = \frac{3n^2+4n+11}{5n^4+6n^2+4n^2+1}$, τότε

$$a_n \le \frac{3n^2+4n^2+11n^2}{5n^4} = \frac{18}{5} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{5} \cdot \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n+10}{2n^3+6n+7}$

Αν $b_n = \frac{n^2+5n+10}{2n^3+6n+7}$, τότε

$$b_n \ge \frac{n^2}{2n^3+6n^3+n^3} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{n}$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

<u>Κριτήριο συγκρίσεως II</u>

Για δυο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ με $0 \le a_n$, $0 < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

και $\boxed{\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \overline{\mathbb{R}}}$, ισχύουν

i) Αν $\ell \neq 0, +\infty$ οι σειρές είναι της αυτής φύσεως.

ii) Αν $\ell=0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n<+\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$

iii) Αν $\ell=+\infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=+\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$

Απόδειξη σελ. 107.

Για την απόδειξη του (i) χρησιμοποιώ την άσκησ

Αν $x_n \to x$ και $x \neq 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ με $\frac{|x|}{2}<|x_n|<\frac{3|x|}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n \geq n_0$.

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη άσκηση για $x_n=\frac{a}{b}$ προκύπτει $\frac{\ell}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3\ell}{2}$ $\forall n \geq n_0$

Οπότε $b_n<\frac{2}{\ell}a_n$ και $a_n<\frac{3\ell}{2}b_n$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο συγκρίσεως I προκύπτει το συμπέρασμα

Παραδείγματα

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+6n+1}{3n^5-2n^3+4n-6}$

Αν $a_n=\frac{2n^2+6n+1}{3n^5-2n^3+4n-6}$, $b_n=\frac{1}{n^3}$ τότε

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2+6n+1}{3n^5-2n^3+4n-6}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{2}{3}$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} b_n<+\infty$ έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^{3/2}+6n-8}{7n^{5/2}+4n^2-6n+12}$

Αν $a_n=\frac{3n^{3/2}+6n-8}{7n^{5/2}+4n^2-6n+12}$, $b_n=\frac{1}{n}$ τότε

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^{3/2}+6n-5}{7n^{5/2}+4n^2-6n+12}}{\frac{1}{n}}=\frac{3}{7}$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=+\infty$ έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$

→ Άσκηση: 16 α), β) λυμένη

Κριτήριο ρίζών (Cauchy)

Έστω μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

με $\ell = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \bar{\mathbb{R}}$

i) $\ell < 1 \Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει απολύτως

ii) $\ell > 1 \Rightarrow$ η σειρά δεν συγκλίνει

Με το κριτήριο αυτό δεν μπορούμε να αποφασίσουμε όταν $\boxed{\ell = 1}$

Παράδειγμα: Για τις σειρές:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ το $\ell = 1$

Ενώ η πρώτη συγκλίνει, η δεύτερη δεν συγκλίνει.

→ Απόδειξη: σελ. 109-110

Παραδείγματα

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+9}{8n^2+7}\right)^n$

Αν $a_n = \left(\frac{5n^2+9}{8n^2+7}\right)^n$ τότε

$\ell = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{5n^2+9}{8n^2+7} = \frac{5}{8} < 1$

οπότε η σειρά συγκλίνει

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{7^n}$

Αν $a_n = \frac{n^n}{7^n}$ τότε,

$l = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{7} = +\infty > 1$

οπότε η σειρά δεν συγκλίνει

→ Ασκησεις: 16 α λυμένη
24 άλυτη

Κριτήριο πηλίκων (D'Alembert)

Εστω μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$l_1 = \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $l_2 = \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

i) $l_2 < 1 \Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει απολύτως

ii) $l_1 > 1 \Rightarrow$ η σειρά δεν συγκλίνει.

(!) Με το κριτήριο αυτό δεν μπορούμε να αποφασίσουμε όταν $\boxed{l_1 \leq 1 \leq l_2}$

Παράδειγμα: Για τις σειρές

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ είναι $l_1 = 1 = l_2$

ενώ η πρώτη συγκλίνει, η δεύτερη δεν συγκλίνει

→ Απόδειξη σελ 111

SRAG

Παραδείγματα

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

Αν $a_n = \frac{n^3}{e^n}$ τότε

$$l_2 = \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup \frac{\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}}{\frac{n^3}{e^n}} =$$

$$= \limsup \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

Επειδή $l_2 = \frac{1}{e} < 1$ η σειρά συγκλίνει

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{n+1}}$

Αν $a_n = \frac{n!}{3^{n+1}}$ τότε

$$l_1 = \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \liminf \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+2}}}{\frac{n!}{3^{n+1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = +\infty > 1$$

οπότε η σειρά δεν συγκλίνει.

→ Ασκήσεις: 24 λυμένη, 26, 32, 33 άλυτες

ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Παραδείγματα

1. $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots$ ή $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^3}$

2. $-\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} - \dots$ ή $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^5}}$

Γενική μορφή

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ή $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

όπου $a_n > 0$

Θεώρημα (Leibniz)

Αν για τη σειρά με εναλλασσόμενους όρους η ακολουθία (a_n) είναι φθίνουσα και μηδενική τότε η σειρά συγκλίνει.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ όπου $a_n > 0$ και έστω (σ_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της.

Θ.Δ.Ο η υποακολουθία (σ_{2n}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη

Πραγματικά,

$\sigma_{2n+2} - \sigma_{2n} = (-1)^{2n+3} a_{2n+2} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} =$

$= -a_{2n+2} + a_{2n+1} \geq 0$

και

$$\sigma_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n} =$$
$$= a_1 - [(a_2 - a_3) + \dots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}] \leq a_1$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι (σ_{2n-1}) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη.

Άρα οι υποακολουθίες (σ_{2n}), (σ_{2n-1}) είναι συγκλίνουσες.

Επειδή,
$$\sigma_{2n} - \sigma_{2n-1} = (-1)^{2n+1} \cdot a_{2n} = -a_{2n}$$

έπεται ότι,

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma_{2n} - \sigma_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} -a_{2n} = 0$$

οπότε $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sigma_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n-1}}$

Άρα, θα συγκλίνει και η (σ_n) και επομένως και η σειρά.

→ Άσκηση: Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές. Ποιες από αυτές είναι απολύτως συγκλίνουσες;

α) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{5/6}}$

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{4^n}$

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

δ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)$

ε) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+3^n}}$

στ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Ασκήσεις: 11, 13, 14 λυμένει

ΔΕΚΑΔΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Γενική μορφή:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$$

ή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

όπου $a_0 \in \mathbb{Z}$ και $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$

Πρόταση: Κάθε δεκαδική σειρά συγκλίνει

Διότι, για την $\sigma_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}$

ισχύουν:

1. Αύξουσα καθώς $\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{a_n}{10^n} \geq 0$

2. Άνω φραγμένη καθώς,

$$\sigma_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} \leq a_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^{n-1}} =$$

$$= a_0 + \frac{9}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{n-2}}\right]$$

$$= a_0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{10}} < a_0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = a_0 + 1$$

Άρα (σ_n) συγκλίνουσα και επομένως η δεκαδική σειρά συγκλίνει

Παρατήρηση (ορισμός δεκαδικού αριθμού)

Ο αριθμός $x = \sum_{n=1} \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}$

συμβολίζεται με $x = a_0, a_1, a_2, \dots$

και ονομάζεται δεκαδικός αριθμός.

Προφανώς $\underline{a_0 \leq x < a_0 + 1}$

Το a_0 ονομάζεται ακέραιο μέρος του x και συμ. $a_0 = [x]$

Ο δεκαδικός αριθμός είναι **ρητός** αν και μόνο αν τα δεκαδικά του ψηφία είναι **περιοδικά**.

→ **Άσκηση** Να γραφούν σε ρητή μορφή:

(α) $0,\overline{3}$, (β) $0,\overline{32}$, (γ) $3,\overline{213}$

(δ) $0,\overline{9}$, (ε) $10,467\overline{5}$, (στ) $6,121\overline{9}$

Άσκηση 26 λυμένη.

Παράδειγμα : $x = 2,\overline{41}$

$$x = 2 + \frac{41}{10^2} + \frac{41}{10^4} + \frac{41}{10^6} + \dots =$$

$$= 2 + \frac{41}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} =$$

$$= 2 + \frac{41}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{239}{99}.$$

Πρόταση

Το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Αρκεί ν.δ.ο. το $[0,1]$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Αν $[0,1]$ είναι αριθμήσιμο έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ μια αρίθμηση των στοιχείων του.
Αν γράψουμε το x_i σε δεκαδική μορφή:

$$x_1 = 0,a_1^1\, a_2^1\, a_3^1 \ldots$$

$$x_2 = 0,a_1^2\, a_2^2\, a_3^2 \ldots$$

$$\vdots$$

$$x_n = 0,a_1^n\, a_2^n\, a_3^n \ldots$$

όπου $a_i^j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ επιλέγουμε μια ακολουθία (b_n) με $b_n \in \{1,2,\ldots,8\}$ και $b_n \neq a_n^n$

Τότε ο αριθμός $x = 0,b_1 b_2 b_3 \ldots \in [0,1)$ ενώ $x \neq x_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ άτοπο.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Κάθε πραγματικός αριθμός γράφεται σε δεκαδική μορφή δηλ.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ δεκαδική σειρά με

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}$$

οπότε $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$

⟹ Ασκήσεις

α) Ν.δ.ο. $0,\overline{9} = 1$, β) $6,134\overline{9} = 6,135$

γ) $3,2\overline{13}$, δ) $2,476\overline{12}$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

(1) $\Delta(f)$, $R(f)$ σελ 129

Πως ευρίσκεται το πεδίον ορισμού της f όταν δίνεται ο τύπος της;

Ασκήσεις : 3 λυμένη , 3 άλυτη

(2) C_f γραφική παράσταση σελ 131

(3) Ακρότατα σελ 132

x_0 σημείο ολικού μεγίστου: $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in \Delta(f)$

x_0 σημείο ολικού ελαχίστου: $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in \Delta(f)$

x_0 σημείο τοπικού μεγίστου: $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in \Delta(f) \cap \Pi(x_0)$

x_0 σημείο τοπικού ελαχίστου: $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in \Delta f \cap \Pi(x_0)$

(4) Άλγεβρα - Σχέσεις συναρτήσεων σελ 134

Ασκήσεις : 1,2 λυμένες - 1,2 άλυτες

(5) Σύνθεση συναρτήσεων σελ 137

(6) Αντιστροφη συναρτησεων σελ 136

Αντιστροφες κυκλικες συναρτησεις

Οι συναρτησεις:

$\sin x \,/\, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \,/\, [0,\pi]$, $tg x \,/\, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και

$ctg x \,/\, (0,\pi)$ ειναι αμφιμονοσημαντες

οποτε οριζονται διαδοχικα οι αντίστροφοί τους:

$\arcsin x : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ τόξο ημιτονου x

$\arccos x : [-1,1] \to [0,\pi]$ τόξο συνημιτονου x

$\mathrm{arc\,tg}\, x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ τόξο εφαπτομενης x

$\mathrm{arcctg}\, x : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ τόξο συνεφαπτομενης x

(7) Μονοτονια συναρτησεων σελ 138
Ασκηση: 8 άλυτη

Ειναι δυνατον $D(f) = A \cup B$, $A \cap B = \phi$
f/A και f/B αύξουσες ενώ f οχι αύξουσα
(Παραδειγμα ασκηση 5 λυμενη)

Προτάσεις

① f γνησίως μονότονη $\Rightarrow \exists\ f^{-1}$ και έχει το αυτό είδος μονοτονίας

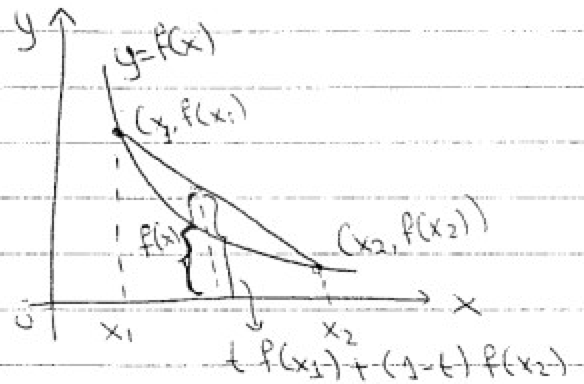
② f, g μονότονες $\Rightarrow f\circ g$ μονότονες

Συγκεκριμένα:
$f\circ g$ αύξουσα αν f, g έχουν το αυτό είδος μονοτονίας

ενώ
$f\circ g$ φθίνουσα αν f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας

Απόδειξη σαν ασκήσεις (βλέπε σελ. 141-142)

(3) Κυρτές - Κοίλες συναρτήσεις σελ 143.



(Κάθε $x\in(x_1,x_2)$ γράφεται υπό την μορφή
$x = t x_1 + (1-t)x_2$, $t\in(0,1)$ όπου $t=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$)

f κυρτή: $\forall\ x_1, x_2 \in \Delta(f)$ και $t\in(0,1) \Rightarrow$

$$f(t x_1 + (1-t)x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

Ανάλογα ορίζονται:
f κοίλη, f γνήσια κυρτή, f γνήσια κοίλη

Άσκηση: 8 λυμένη

(9) Άρτιες και περιττές συναρτήσεις σελ. 145

f άρτια $\overset{\text{op}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in \Delta(f) \Rightarrow -x \in \Delta(f)$ και
$f(-x) = f(x)$

f περιττή $\overset{\text{op}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in \Delta(f) \Rightarrow -x \in \Delta(f)$ και
$f(-x) = -f(x)$

Ασκήσεις: 11, 12, 13 λυμένες

(10) Περιοδικές συναρτήσεις σελ 145

f περιοδική $\overset{\text{op}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in \Delta(f) \Rightarrow x+\tau \in \Delta(f)$ και

$f(x+\tau) = f(x)$ όπου $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{περίοδος}}}{\tau \in \mathbb{R}^*}$

Η μικρότερη θετική περίοδος ονομάζεται πρωτεύουσα περίοδος
Ασκήσεις 6,7 λυμένες

Σύγκλιση συναρτήσεων σελ. 147.

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$$

Πλευρικά όρια

$\lim_{x\to\xi^+} f(x)$ δεξιά οριακή τιμή της f

$\lim_{x\to\xi^-} f(x)$ αριστερή οριακή τιμή της f

Ακολουθιακός ορισμός συγκλίσεως

$\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall$ ακολουθία (x_n) με $x_n \in \Delta(f)$ και $x_n \to \xi \Rightarrow$
$f(x_n) = \ell$.

Άσκηση (1ς λυμένη)

Να εξετασθεί αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{\pi}{x}$

Λύση

Έστω $f(x) = \sin\frac{\pi}{x} \,|\, (0,+\infty)$

Θέτουμε $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{4n+1}$

Τότε $a_n \to 0$, $b_n \to 0$

Επιπλέον,

$f(a_n) = \sin \pi n = 0$

$f(b_n) = \sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Άρα $f(a_n) \to 0$ ενώ $f(b_n) \to 1$

Οπότε, $\nexists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Ιδιότητες συγκλίσεως

ανάλογες ακολουθιών σελ 51-54

Βασικά όρια (αποδ. σελ. 155)

1. Τριγωνομετρικά

$\lim\limits_{x\to \xi} \sin x = \sin \xi \qquad \lim\limits_{x\to \xi} \cos x = \cos \xi$

$\lim\limits_{x\to \xi} tg x = tg \xi \quad , \quad \lim\limits_{x\to \xi} ctg x = ctg \xi$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. Δυνάμεως

$\lim\limits_{x\to 1} x^{\kappa} = 1 \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

3. Εκθετικά

$$\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi \quad \forall\ a>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a>1 \\ 0, & \text{αν } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{αν } a>1 \\ +\infty, & \text{αν } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

4. Λογαριθμικά

$$\lim_{x\to\xi} (\ln x) = \ln\xi \quad , \forall\ \xi>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} (\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Ασκήσεις

11, 12, 13 λυμένες

17, 18, 19, 20, 23 άλυτες

SKAG

Βιβλιο σελ. 162 έννοια της ασυμπτώτου

Συνέχεια συναρτήσεων

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\xi \in \Delta(f)$ όταν,

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$$

Κριτηριο συνέχειας με ακολουθιες

f συνεχής στο $\xi \Leftrightarrow \forall$ ακολουθια (x_n) στο $\Delta(f)$ με
$x_n \to \xi \Rightarrow f(x_n) \to f(\xi)$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Το αθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο, το πηλικον και η σύνθεση δύο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Βασικες συνεχεις συναρτήσεις

Πολυωνυμικες, Ρητές, Τριγωνομετρικές, Εκθετικες, Λογαριθμικές

Ασκησεις: 20, 21 λυμένες
26-30 άλυτες

Συνέχεια συναρτήσεων που ορίζονται σε διαστήματα

Πρόταση: Κάθε συνεχής συνάρτηση $f|[\alpha,\beta]$ είναι φραγμένη

Η απόδειξη θα γίνει με άτοπο

Αν η συνάρτηση δεν είναι άνω φραγμένη τότε
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists\, x_n \in [\alpha,\beta)$ με $f(x_n) > n$

Έτσι, δημιουργείται μια φραγμένη ακολουθία (x_n) η οποία πρέπει να έχει ένα τουλάχιστον σ.σ x στο $[\alpha,\beta]$

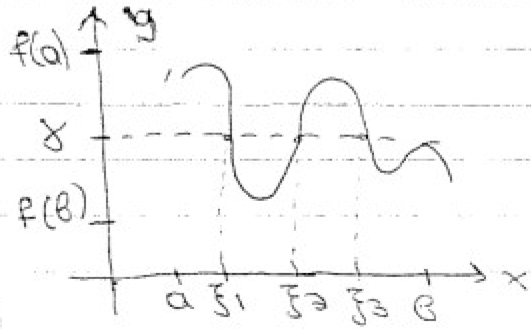
Τότε όμως θα υπάρχει υποακολουθία
(x_{k_n}) με $x_{k_n} \to x$

Από τη συνέχεια της f προκύπτει ότι
$$f(x_{k_n}) \to f(x)$$

Άτοπο διότι $f(x_{k_n}) > k_n > n$
δηλαδή η ακολουθία $f(x_{k_n})$ δεν είναι συγκλίνουσα.

Θεώρημα (Bolzano)

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f|[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και γ μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$.
$\exists$ τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ με $f(\xi) = \gamma$



Ισοδύναμη μορφή

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f|[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$
$\exists$ τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f(\xi)=0$

Αν εφαρμοσθεί το Θ. Bolzano για $\gamma=0$ προκύπτει το παραπάνω

Αντίστροφα, αν ισχύει η παραπάνω μορφή το Θ. Bolzano προκύπτει από αυτή με εφαρμογή της για $g(x)=f(x)-\gamma$

Ασκήσεις: 22, 23 λυμένες
38, 39, 40 άλυτες

Απόδειξη Θ. Bolzano

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποτίθεται ότι

$$f(\alpha)<\gamma<f(\beta)$$

Θεωρούμε το σύνολο:

$$E=\{x\in[\alpha,\beta]: f(x)\leq\gamma\}$$

Τότε $E\neq\emptyset$ $(\alpha\in E)$ και άνω φραγμένο (από το β)
Οπότε, $\exists\ \xi=\sup E\in\mathbb{R}$

Θα δειχθεί ότι $f(\xi)=\gamma$

Από τον ορισμό του supremum προκύπτει ότι:

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists \ x_n \in E : \xi - \frac{1}{n} < x_n \leq \xi$

Τότε $x_n \to \xi \Rightarrow f(x_n) \to f(\xi)$

Επειδή $x_n \in E \Rightarrow f(x_n) \leq y \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(\xi) \leq y$

Από την άλλη επειδή $\xi < \beta$ (διότι $f(\xi) \leq y < f(\beta)$) ευρίσκεται ακολουθία (z_n) με

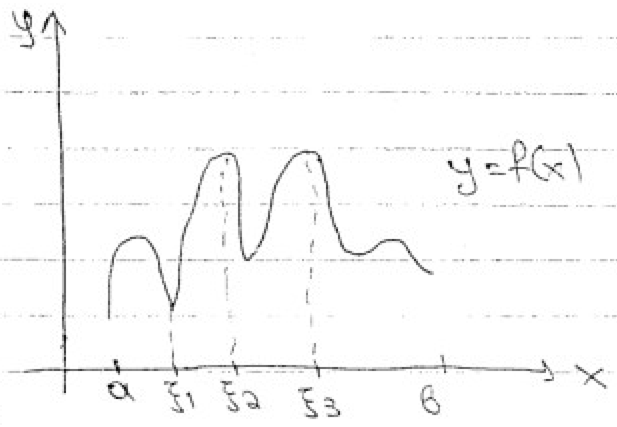
$\xi < z_n < \beta \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ και $z_n \to \xi$

Επειδή $\xi < z_n \Rightarrow z_n \notin E \ \forall n \in \mathbb{N}^*$
$\Rightarrow f(z_n) > y \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Άρα $f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) \geq y$

Θεώρημα (Weierstrass)
(Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής)

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f|[a,\beta]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο ολικού μεγίστου και ένα τουλάχιστον σημείο ολικού ελαχίστου



Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο στα ξ_1, ξ_2 $(f(\xi_2) = f(\xi_3))$ και ολικό ελάχιστο στο ξ_1

Άσκηση 26 λυμένη

Απόδειξη Θ. Weierstrass ☆ SOS ☆

Επειδή f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ θα είναι φραγμένη

Έστω $M = \sup\{f(x) : x \in [a,\beta]\}$

Θα δειχθεί ότι $\exists\ \xi \in [a,\beta]$ με $f(\xi) = M$.

Αν $f(x) \neq M$ $\forall\ x \in [a,\beta]$ θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \quad | [a,\beta]$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ άρα φραγμένη.
Έτσι θα $\exists\ \phi > 0$: $g(x) \leq \phi$ $\forall x \in [a,\beta] \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq \phi \quad \forall x \in [a,\beta] \Leftrightarrow$$

$$f(x) \leq M - \frac{1}{\phi} \quad \forall\ x \in [a,\beta]$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω του ορισμού του supremum

Έτσι, υπάρχει σημείο ολικού μεγίστου.
Ομοίως, αποδεικνύεται αν υπάρχει σημείο ολικού ελαχίστου

Ομαλή Συνέχεια

f συνεχής $\Leftrightarrow$ f συνεχής στο x για κάθε $x \in \Delta(f)$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to x} f(t) = f(x)$$

για κάθε $x \in \Delta(f)$

δηλαδή για κάθε $x \in \Delta(f)$ ισχύει:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon, x) : t \in \Delta(f)$ και $|x - t| < \delta$
έπεται ότι $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$

Αν απαιτήσουμε το δ να εξαρτάται μόνο από το ε και όχι από το x προκύπτει ο ορισμός της ομαλής συνέχειας.

Ορισμός:
f ομαλά (ή ομοιόμορφα) συνεχής αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) : x_1, x_2 \in \Delta(f)$ και $|x_1 - x_2| < \delta$ έπεται ότι $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Προφανώς, $\boxed{f \text{ ομαλά συνεχής} \Rightarrow f \text{ συνεχής}}$

Παραδείγματα

① $f(x) = \sin x / \mathbb{R}$ είναι ομαλά συνεχής

Διότι,
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin x_1 - \sin x_2| =$$
$$= 2\left|\sin \frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x_1 + x_2}{2}\right|$$
$$\leq 2 \left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot 1 = |x_1 - x_2|$$

Άρα για ε>0 εκλέγουμε δ=ε οπότε

$$|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

② $f(x)=x^2|(0,1)$ είναι ομαλά συνεχής.

Διότι για $x_1,x_2\in(0,1)$ θα είναι:

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |x_1^2-x_2^2| = |x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2| < 2|x_1-x_2|$$

Οπότε αν εκλεγεί $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ προκύπτει $|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

Ασκήσεις 27, 28, 29 λυμένες
+ Απόδειξη της πρότασης: Κάθε συνεχής $f|[a,b]$ είναι ομαλά συνεχής. σελ 175

③ $f(x)=\frac{1}{x}\ |(0,1)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομαλά συνεχής διότι το (0,1) ανοικτό.

<u>Απόδειξη</u>

Αν η $f(x)=\frac{1}{x}$ (0,1)
είναι ομαλά συνεχής τότε $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0:\ x_1,x_2\in(0,1)$ και
$|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

Αν $x_1=\min\left\{\delta,\frac{1}{2}\right\}$, $x_2=\frac{x_1}{1+\varepsilon} \Rightarrow$

$x_1,x_2\in(0,1)$ και $|x_1-x_2| = \left|x_1-\frac{x_1}{1+\varepsilon}\right| = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}x_1<\delta$ όμως

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1}-\frac{1+\varepsilon}{x_1}\right| = \frac{\varepsilon}{x_1}>\varepsilon \quad \text{Άτοπο.}$$

Παραγώγιση

Ορισμός: $\boxed{f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}$ σελ. 215

Πλευρικές παράγωγοι: $f'_-(\xi)$, $f'_+(\xi)$

f παραγωγίσιμη στο ξ $\Leftrightarrow$ $f'_-(\xi) = f'_+(\xi)$

f παραγωγίσιμη στο ξ $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f συνεχής στο ξ

Κανόνες παραγώγισης σελ 219 με αποδείξεις

Παράγωγος συνθέτου συναρτήσεως σελ 219 χωρίς απόδ.
(κανόνας αλυσίδας)

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Παράγωγος αντιστρόφου συναρτήσεως

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$ σελ. 222 με αποδ.

όπου f γνησίως μονότονη
$y = f(x)$ και $f'(x) \neq 0$

Αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις
$f(x) = \sin x \mid [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \cos x \mid [0, \pi]$
$f(x) = tg x \mid (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $f(x) = ctg x \mid (0, \pi)$

είναι γνησίως μονότονες οπότε υπάρχουν οι αντίστροφοί τους:

arcsinx   τόξο ημιτόνου x
arccosx   τόξο συνημιτόνου x
arctgx   τόξο εφαπτομένης x
arcctgx   τόξο συνεφαπτομένης x

$\arcsin y = x \Leftrightarrow \sin x = y$
$\arccos y = x \Leftrightarrow \cos x = y$
$\mathrm{arctg}\, y = x \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, x = y$
$\mathrm{arcctg}\, y = x \Leftrightarrow \mathrm{ctg}\, x = y$

$\boxed{\text{Παραδείγματα}}$

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$ $\mathrm{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Ισχύουν

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

+ αποδείξεις των τύπων.

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Απόδειξη του τύπου

→ $\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$, $x \in (-1,1)$

Έστω η συνάρτηση:

$f(x) = \sin x \mid [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

η οποία είναι γνησίως αύξουσα, και η αντίστροφή της $f^{-1} \mid [-1,1]$ η οποία συμβολίζεται με $f^{-1}(y) = \arcsin y$

Έχουμε,

$(\arcsin y)' = (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$

Όπου $f(x) = y \Leftrightarrow \sin x = y$

Οπότε, $f'(x) = (\sin x)' = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2}$

Άρα, $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

→ Άσκηση: Να αποδειχθούν οι υπόλοιποι τρεις τύποι.

Πίνακας βασικών παραγωγίσεων

$(x^a)' = a x^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ όπου $a>0$ $\quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\cosh x)' = \sinh x$ $\quad (\sinh x)' = \cosh x$

SKAG

όπου $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ υπερβολικό συνημίτονο

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ υπερβολικό ημίτονο

→ Ασκήσεις : 1, 2, 3, 4 λυμένες
1, 2, 5, 7, 9, 10 άλυτες.

Εφαπτομένη γραφικής παράστασης
σελ 227-229

$\boxed{y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)}$ f παραγωγίσιμη στο ξ

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$

$\boxed{x = \xi}$ f συνεχής στο ξ
και $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = +\infty$ ή $-\infty$

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$

Εφαπτομένη κωνικών τομών σελ 230-233

→ Ασκήσεις : 6 λυμένη
12, 13, 14, 15, 16 άλυτες

Περιοχή σημείου

$\Pi(x) = (x-\delta, x+\delta)$, $\delta > 0$

A° σύνολο εσωτερικών σημείων συνόλου

x εσωτερικό σημείο του A σημαίνει $\exists$ περιοχή $\Pi(x) \subseteq A$

Παραδείγματα

1. Αν $A = [1,2) \cup \{3\} \cup [4,5]$

Τότε $A^\circ = (1,2) \cup (4,5)$

2. Αν $A = \mathbb{N} \Rightarrow A^\circ = \emptyset$

Διαφορικά συναρτήσεως

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f/A στο σημείο $\xi \in A^\circ$

Τότε η γραμμική συνάρτηση

$$t \to f'(\xi)(t)$$

ονομάζεται διαφορικό της f στο ξ και συμβολίζεται με $df(\xi)$, δηλ.

$$\boxed{df(\xi)(t) = f'(\xi) \cdot t}$$

Επειδή το διαφορικό της ταυτοτικής συνάρτησης $x \to x$ είναι $dx(t) = t$ ο τύπος του διαφορικού γράφεται:

$$df(\xi) = f'(\xi)\,dx$$

Αν υπάρχει το διαφορικό της f σε κάθε $\xi \in A^o$ τότε η συνάρτηση ονομάζεται <u>διαφορίσιμη</u> στο A και η συνάρτηση df/A^o <u>διαφορικό της f</u> δηλαδή

$$\boxed{df = f' dx}$$

Εκεί οφείλεται και ο συμβολισμός του Leibnitz για την παράγωγο: $f' = \dfrac{df}{dx}$

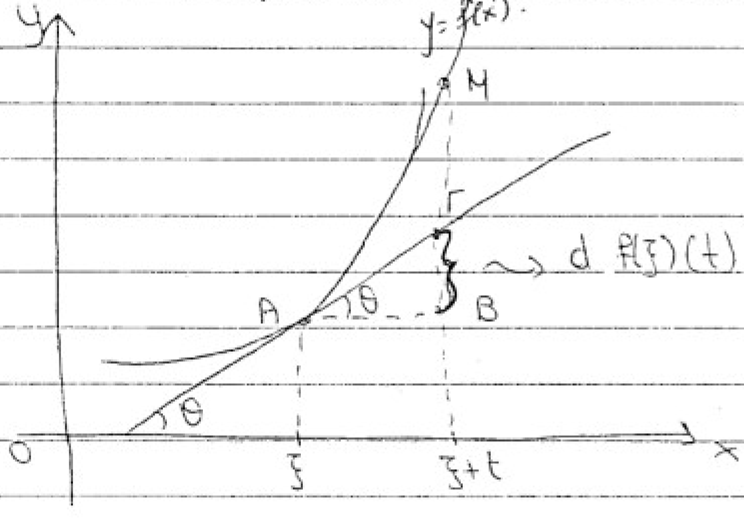
→ <u>Ασκήσεις</u>: Να ευρεθεί το διαφορικό της συναρτήσεως f στο σημείο ξ όταν:

i) $f(x) = x^2 \sin x \,/\, \mathbb{R}$, $\xi = \frac{\pi}{2}$

ii) $f(x) = x \ln x \,/\, \mathbb{R}^+$, $\xi = e$

→ <u>Ασκήσεις</u>: 11 λυμένη, 17 άλυτη

Γεωμετρική ερμηνεία διαφορικού



$$\left.\begin{array}{l} tg\theta = f'(\xi) \\ \\ tg\theta = \dfrac{B\Gamma}{AB} \end{array}\right\} B\Gamma = f'(\xi) \cdot AB = f'(\xi) \cdot t = d f(\xi) \cdot (t)$$

Δηλαδή το μήκος του ΒΓ εκφράζει το διαφορικό γεωμετρικά

Αν t πολύ μικρό (δηλ. $t \to 0$) προκύπτει ότι:

$$MB \simeq B\Gamma$$

$$\boxed{f(\xi+\Delta x) - f(\xi) \approx df(\xi)(\Delta x)}$$

Όπου $\Delta x = t$ μεταβολή της μεταβλητής

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ μεταβολή της συνάρτησης

Εφαρμογή

Να ευρεθεί κατά προσέγγιση η τιμή του $\sqrt{26}$

Έστω $f(x) = \sqrt{x} \mid (0, +\infty)$

Τότε $df(\xi)(\Delta x) = f'(\xi)\cdot \Delta x = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}} \cdot \Delta x$

Για $\xi = 25$ και $\Delta x = 1$ προκύπτει:

$$df(25)(1) = \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 1 = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Έτσι

$f(25+1) - f(25) \simeq df(25)(1) \Leftrightarrow$

$\sqrt{26} - \sqrt{25} \simeq 0{,}1 \Rightarrow \sqrt{26} \simeq 5{,}1$

→ Άσκηση: Να βρεθεί μια προσεγγιστική τιμή του αριθμού $\sqrt{65}$ (Απάντηση: 4,21)

Παράγωγοι ανωτέρας τάξεως

$$\boxed{f^{(n)} \left(\text{ή } \frac{d^n f}{dx^n}\right) = \left(f^{(n-1)}\right)'}$$

νιοστή παράγωγος

Θεώρημα fermat σελ 248 με απόδειξη

Αν f παραγωγίσιμη στο $\xi \in A^\circ$ που είναι σημείο τοπικού ακρότατου τότε $f'(\xi)=0$ (δηλ. ξ στάσιμο σημείο)

Αντίστροφο δεν ισχύει π.χ $f(x) = x^3 / \mathbb{R}$

Θεώρημα Rolle 505

Έστω $f/[a,\beta]$ με
(1) f συνεχής στο $[a,\beta]$.
(2) f παραγωγίσιμη στο (a,β)
(3) $f(a)=f(\beta)$

Τότε $\exists$ (τουλάχιστον ένα) $\xi \in (a,\beta) : f'(\xi)=0$

Απόδειξη
- Αν f σταθερή το συμπέρασμα ισχύει
- Αν f δεν είναι σταθερή τότε $\exists\ x_0 \in (a,\beta)$ με $f(x_0) \neq f(a)$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f(x_0) > f(a)$

Από το θεώρημα του Weierstrass ισχύει
$$f(\xi) = \sup\{f(x) : x \in [a,\beta]\}$$
όπου $\xi \in [a,\beta]$

Επειδή $f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(\beta)$
έπεται ότι $\xi \neq a$ και $\xi \neq \beta$ οπότε $\xi \in (a,\beta)$

Οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα του fermat και είναι $f'(\xi)=0$

Εφαρμογές

① Να δειχθεί ότι η εξίσωση:

$$4x^3-6x^2-2x+2=0$$

έχει τρεις πραγματικές ρίζες στο $(-1,2)$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=x^4-2x^3-x^2+2x \;/\mathbb{R}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη (οπότε και συνεχής) με
$f'(x)=4x^3-6x^2-2x+2$ και
$f(-1)=f(0)=f(1)=f(2)=0$

Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για τις συναρτήσεις:
$f|[-1,0]$, $f|[0,1]$ και $f|[1,2]$ οπότε
$\exists\, \xi_1\in(-1,0)$, $\xi_2\in(0,1)$ και $\xi_3\in(1,2)$ με
$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$

Προφανώς τα ξ_1,ξ_2,ξ_3 είναι διαφορετικά διότι ανήκουν σε ξένα διαστήματα και αποτελούν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης.

② Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3+12x+7=0$ δεν μπορεί να έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες

Θεωρούμε την συνάρτηση:
$f(x)=x^3+12x+7 \;/\mathbb{R}$

η οποία είναι παραγωγίσιμη (οπότε και συνεχής) με
$f'(x)=3x^2+12$

Αν υποτεθεί ότι η δοσμένη εξίσωση έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$, εφαρμόζεται το Θ.Rolle για την συνάρτηση $f / [\rho_1, \rho_2]$ οπότε θα υπάρχει

$\xi_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ με

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 12 = 0$ άτοπο

→ Ασκήσεις: 15, 16, 17 θυμένει
20, 22, 23 άλυτες

Ακολουθία του Rolle

Πρόβλημα: Να ευρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών διαφορετικών μεταξύ τους ενός πολυωνύμου.

Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ οι πραγματικές και άνισες ρίζες της $P'(x) = 0$ με $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$

Τότε η πεπερασμένη ακολουθία:
$p(-\infty), p(\xi_1), p(\xi_2), \ldots, p(\xi_n), p(+\infty)$
ονομάζεται ακολουθία του Rolle

Ισχύουν:

1. Κάθε διάστημα
$(-\infty, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), (\xi_2, \xi_3), \ldots, (\xi_{n-1}, \xi_n), (\xi_n, +\infty)$
περιέχει το πολύ μία πραγματική ρίζα της $p(x) = 0$

(Εφαρμογή του Θ. Rolle)

2. Αν $p(\xi_k) \cdot p(\xi_{k+1}) < 0$
τότε το διάστημα (ξ_k, ξ_{k+1}) περιέχει μια ακριβώς ρίζα της $p(x)=0$

3. Αν $p(\xi_k) \cdot p(\xi_{k+1}) > 0$
τότε το διάστημα (ξ_k, ξ_{k+1}) δεν περιέχει καμία ρίζα της $p(x)=0$

Διότι, αν $p(\xi_k), p(\xi_{k+1}) > 0$
(ανάλογα αν $p(\xi_k), p(\xi_{k+1}) < 0$)

από το Θ. του Weirstrass $\exists\ \xi \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ με

$$p(\xi) = \min\{p(x) : x \in [\xi_k, \xi_{k+1}]\}$$

Επειδή $p'(\xi) \neq 0\ \forall\ \xi \in (\xi_k, \xi_{k+1})$ από το Θ Fermat έπεται ότι:
$\xi = \xi_k$ ή $\xi = \xi_{k+1}$

Άρα $p(\xi) > 0 \Rightarrow p(x) > 0\ \forall\ x \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$.

Συνεπώς το πλήθος των εναλλαγών του προσήμου των όρων της ακολουθίας του Rolle δίνει το πλήθος των διαφορετικών πραγματικ[ών] ριζών του πολυωνύμου.

Εφαρμογή: Να ευρεθεί το πλήθος των πραγματικών διαφορετικών ριζών του πολυωνύμου:
$$p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 12x + 7$$

Θεώρημα (Lagrange)

(Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού)

Αν f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a,β) τότε $\exists$ (τουλάχιστον ένα) $\xi \in (a,\beta)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $F|[a,\beta]$ με $F(x) = f(a) - f(x) + (x-a)\dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$

είναι:

(1) συνεχής στο $[a,\beta]$

(2) παραγωγίσιμη στο (a,β)

(3) $F(a) = 0 = F(\beta)$

οπότε σύμφωνα **με το Θ. Rolle** $\exists\ \xi \in (a,\beta)$ **με**

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -f'(\xi) + \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$$

Εφαρμογή: Να δειχθεί η ανισότητα:

$$\ln x \leq x-1 \quad , \forall\ x>0$$

- Για $x=1$ ισχύει ισότητα

- Για $x>1$ εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση $f(t) = \ln t \mid [1,x]$

Οπότε θα υπάρχει $\xi \in (1,x)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x-1}$$

Επειδή $\xi > 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x-1} < 1 \Rightarrow \ln x < x-1$

· Για $0<x<1$ ομοίως:

Άσκηση: Να δειχθεί η ανισότητα:
$1+x \leq e^x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

Πορίσματα

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)=0 \quad , \forall x \in (\alpha,\beta)$ τότε f είναι σταθερή

Πραγματικά αν $\gamma,\delta \in [\alpha,\beta]$ με $\gamma<\delta$
Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την $f|[\gamma,\delta]$ οπότε
υπάρχει $\xi \in (\gamma,\delta)$ με $f'(\xi) = \frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma}$

Επειδή $f'(\xi)=0 \Rightarrow f(\delta)=f(\gamma)$

2. Αν δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g $|[\alpha,\beta]$ έχουν ίσες παραγώγους τότε θα διαφέρουν κατά μια σταθερά

Άσκηση: Να δειχθεί η ταυτότητα:
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \ , \forall x \in [-1,1]$$

Αν $f(x) = \arcsin x + \arccos x \ |[-1,1]$
τότε $f'(x) = (\arcsin x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0$

Οπότε $\exists\, c \in \mathbb{R}$ με $f(x) = c \quad \forall\, x \in [-1, 1]$

Επειδή, $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

έπεται ότι $c = \frac{\pi}{2}$ οπότε ισχύει

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Πρόταση (Cauchy)

Αν δυο συνεχείς συναρτήσεις $f, g \,|\, [a, \beta]$ που παραγωγίζονται στο (a, β) με $g'(x) \neq 0 \;\forall\, x \in (a, \beta)$ τότε $\exists$ (τουλάχιστον ένα) $\xi \in (a, \beta)$ με

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)}$$

Αποδεικνύεται δια εφαρμογής του Θ-Rolle για την συνάρτηση:

$$F(x) = f(a) - f(x) + (g(x) - g(a)) \frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)}$$

Ασκήσεις 19, 20, 21 λυμένες, 24, 25, 26 άλυτες.

Απροσδιόριστες μορφές
Κανόνας D' Hospital

σελ 255-263 χωρίς αποδείξεις

Ασκήσεις 22 λυμένη, 27, 28 άλυτες